Numerisches Rechenverfahren für den Todeszeitpunkt aus der Körpertemperatur
Bernd Haider, Version 1, 28.02.2019

Laut Urteil im Mordfall Charlotte Böhringer wurde aus der Umgebungstemperatur am Tatort und der Körpertemperatur des Leichnams mehr als einen Tag später der Todeszeitpunkt mit einem engen Zeitfenster von 45 Minuten hergeleitet. Diese Aussage erscheint mir so gewagt und fragwürdig, dass ich sie auf Plausibilität prüfen möchte. Hier beschreibe ich zunächst die generelle Vorgehensweise.

Abkühlung eines Körpers lässt sich mit einer Differentialgleichung beschreiben:

dTK / dt = AC * (TU – TK)   Newtonsches Abkühlungsgesetz

Dabei sind

*	Symbol für Multiplikation
TK:	Körpertemperatur
TU:	Umgebungstemperatur
AC:	Abkühlkonstante
t:	Laufende Zeit
dt:	Infinitesimal kleiner Zeitschritt
dTK:	Temperaturänderung während dieses kleinen Zeitschrittes.

Das Verhältnis dTK / dt ist die Geschwindigkeit der Temperaturänderung in Grad pro Sekunde.

Die klassische Lösung dieser Differentialgleichung ist im Wesentlichen eine Exponentialfunktion. Weil sie als Übungsaufgabe beliebt ist, lässt sie sich an verschiedenen Stellen finden. Zur Prüfung meines numerischen Lösungsansatzes verwende ich Daten der TU Darmstadt:

https://wwwdid.mathematik.tu-darmstadt.de/amustud/amu_stud_website/dgl/Bluete2L.html

Gegenüber der klassischen Lösung liefert eine numerische Lösung keine Formel sondern nur eine Zahlentabelle. Sie hat den Vorteil, dass sich verschiedene Größen flexibel verändern oder hinzufügen lassen, die für die klassische Lösung konstant sein müssen.

Der Ansatz zur numerischen Lösung des Abkühlungsgesetzes lautet:

ΔTK / Δt = AC * (TU – TK)   oder umgeformt
ΔTK = Δt * AC * (TU – TK)

In guter Näherung gilt die Gleichung auch für einen endlich langen Zeitschritt Δt statt des kurzen Zeitschrittes dt. Damit verbunden ist eine passende Temperaturänderung ΔTK.
Für jeden vieler aufeinanderfolgender Zeit- bzw. Rechenschritte im Zeitabstand von Δt wird zunächst ΔTK nach der angegebenen Formel aus den aktuellen Temperaturen berechnet und darauf die Körpertemperatur um ΔTK verändert (lineare Extrapolation):

TK (t + Δt) = TK (t) + ΔTK   TK (t) ist die Körpertemperatur zum Zeitpunkt t

Es zeigt sich, dass bei so langsamen Vorgängen das relativ lange Zeitintervalle von Δt = 300 sec und ein darauf bezogenes ΔTK ausreichen. ΔTK ist also die Änderung der Körpertemperatur innerhalb von 300 sec, die im Laufe der Zeit kleiner wird.

Zur numerischen Lösung wird üblicherweise ein passendes Rechenprogramm verwendet. Bei den wenigen erforderlichen Schritten zwischen Todeszeitpunkt und Messung der Körpertemperatur ist aber auch eine Tabellenkalkulation geeignet. Damit lässt sich außerdem der Rechenablauf sehr leicht in variieren.

Es ist sinnvoll eine numerische Rechnung zunächst einer Prüfung zu unterziehen. Dafür bietet sich der oben benannte Spezialfall der TU Darmstadt an. Das Ergebnis lautet:

		Abkühl-	--------- Temperaturen ---------		
Zeit in min	Zeit h	Konstante	Umgebung	Körper	Differenz
t		Δt * AC	TU	TK	TK - TU
-97	-1,62	0,02583	17,00	36,00	19,00
-92	-1,53	0,02583	17,00	35,51	18,51
-87	-1,45	0,02583	17,00	35,03	18,03
-82	-1,37	0,02583	17,00	34,57	17,57
-77	-1,28	0,02583	17,00	34,11	17,11
-72	-1,20	0,02583	17,00	33,67	16,67
-67	-1,12	0,02583	17,00	33,24	16,24
-62	-1,03	0,02583	17,00	32,82	15,82
-57	-0,95	0,02583	17,00	32,41	15,41
-52	-0,87	0,02583	17,00	32,01	15,01
-47	-0,78	0,02583	17,00	31,63	14,63
-42	-0,70	0,02583	17,00	31,25	14,25
-37	-0,62	0,02583	17,00	30,88	13,88
-32	-0,53	0,02583	17,00	30,52	13,52
-27	-0,45	0,02583	17,00	30,17	13,17
-22	-0,37	0,02583	17,00	29,83	12,83
-17	-0,28	0,02583	17,00	29,50	12,50
-12	-0,20	0,02583	17,00	29,18	12,18
-7	-0,12	0,02583	17,00	28,86	11,86
-2	-0,03	0,02583	17,00	28,56	11,56
3	0,05	0,02583	17,00	28,26	11,26
8	0,13	0,02583	17,00	27,97	10,97
13	0,22	0,02583	17,00	27,68	10,68
18	0,30	0,02583	17,00	27,41	10,41
23	0,38	0,02583	17,00	27,14	10,14
28	0,47	0,02583	17,00	26,88	9,88
33	0,55	0,02583	17,00	26,62	9,62
38	0,63	0,02583	17,00	26,37	9,37
43	0,72	0,02583	17,00	26,13	9,13
48	0,80	0,02583	17,00	25,90	8,90
53	0,88	0,02583	17,00	25,67	8,67
58	0,97	0,02583	17,00	25,44	8,44
63	1,05	0,02583	17,00	25,22	8,22
68	1,13	0,02583	17,00	25,01	8,01
73	1,22	0,02583	17,00	24,80	7,80
78	1,30	0,02583	17,00	24,60	7,60
83	1,38	0,02583	17,00	24,41	7,41
88	1,47	0,02583	17,00	24,22	7,22
93	1,55	0,02583	17,00	24,03	7,03
98	1,63	0,02583	17,00	23,85	6,85
103	1,72	0,02583	17,00	23,67	6,67
108	1,80	0,02583	17,00	23,50	6,50
113	1,88	0,02583	17,00	23,33	6,33
118	1,97	0,02583	17,00	23,17	6,17
123	2,05	0,02583	17,00	23,01	6,01
128	2,13	0,02583	17,00	22,85	5,85

Entsprechend des oben angegebenen Links beträgt die Umgebungstemperatur 17 °C.
Die Körpertemperatur zum Todeszeitpunkt beträgt 36 °C.
Die Körpertemperatur beim Auffinden des Leichnams beträgt 28,5 °C.
Zwei Stunden später beträgt die Körpertemperatur 23,2 °C.
Daraus errechnet sich eine Abkühlkonstante von $k = 0{,}31\ h^{-1}$.
Für den Todeszeitpunkt ergibt die klassische Rechnung -1,62 Stunden, also 1,62 Stunden vor dem Auffinden zum Zeitpunkt 0,0.

In meiner auf Sekunden bezogenen Rechnung entspricht
$k = 0{,}31\ h^{-1}$ einem $AC = 0{,}0000861\ s^{-1}$.
Zusammen mit dem Zeitschritt $\Delta t = 300$ s ergibt sich die Rechengröße $\Delta t * AC = 0{,}02583$.
In der Ergebnistabelle sind die zu vergleichenden Zahlen gelb unterlegt. Die Genauigkeit ist für den Zweck der Rechnung ausreichend. Durch Verkleinerung der Zeitschritte Δt ließe sie sich beliebig verbessern. Ein der Tabelle zugrunde liegendes Excel-Arbeitsblatt ist verfügbar im Anhang oder unter

https://www.radonmaster.de/charlotte-b/numerisches_rechenverfahren.xls

Dort gibt es zwei Excel-Tabellen für die Zeitschritte $\Delta t = 300$ s und $\Delta t = 60$ s, mit denen Interessenten experimentieren können.
In diesem Fall habe ich die Lösungen aus der Übungsaufgabe übernommen. Wenn die nicht bekannt sind, muss man AC solange variieren, bis das Ergebnis mit den vorgegebenen Temperaturen (28,5 °C und 23,2 °C zu den Zeiten 0,0 bzw. 2,0 Stunden) übereinstimmt. In der Excel-Tabelle, geschieht das durch manuelles Ausprobieren, entsprechende Rechenprogramme würden das automatisch machen.

Im Fall Böhringer sind die nötigen Temperaturen und Zeitpunkte nicht bekannt. Allerdings gibt es eine Behauptung zum Todeszeitpunkt, die sich nachempfinden lässt. Anschließend können die Bedingungen geringfügig verändert werden, um zu ermitteln, wie stichhaltig die Behauptung ist. Dazu gibt es separate Ausführungen.